

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Ivana Horvat**

Zagreb, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Bojan Jerbić, dipl. ing.

Student:

Ivana Horvat

Zagreb, 2013.

## **IZJAVA**

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno služeći se stečenim znanjem, navedenom literaturom, uz nadzor i stručne savjete mentora prof. dr. sc. Bojana Jerbića.

Ivana Horvat

## **ZAHVALA**

Prije svega, željela bih se zahvaliti mentoru, prof. dr. sc. Bojanu Jerbiću, što mi je, svojim znanjem i stručnim savjetima, pomogao u izradi ovog diplomskog rada.

Nadalje, veliko hvala Barbi, na podršci, savjetima i pruženom znanju tijekom svih godina mog studiranja.

Željela bih se zahvaliti svojim prijateljima, koji su mi velika podrška u svemu što radim.

Na kraju, najveće hvala mami, na podršci tijekom cijelog mog života te pruženoj mogućnosti da svoje snove pretvorim u stvarnost.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **IVANA HORVAT**

Mat. Br.: 0035164088

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

**PROSTORNA LOKALIZACIJA OBJEKTA KORIŠTENJEM  
METODE TRIANGULACIJE**

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

**SPATIAL OBJECT LOCALIZATION USING TRIANGULATION  
METHOD**

Opis zadatka:

U radu je potrebno razviti algoritam za određivanje prostornog položaja objekta metodom triangulacije. Pretpostaviti označavanje predmeta markerom s tri točke. Prostorne koordinate tri karakteristične točke potrebno je odrediti putem informacija dobivenih od 2D vizijskog sustava te segmentacijom digitalne slike markera. Poznavanje parametara kamere te međusobne prostorne udaljenosti karakterističnih točaka na predmetu matematičkom triangulacijom moguće je 2D koordinate sa slike povezati sa prostornim koordinatama predmeta. Rezultat triangulacijskog algoritma je položaj predmeta u odnosu na koordinatni sustav kamere.

Razvijeni algoritam potrebno je primijeniti i verificirati na dostupnoj opremi u Laboratoriju za projektiranje izradbenih i montažnih sustava.

Zadatak zadan:

06. prosinca 2012.

Rok predaje rada:

07. veljače 2012.

Predviđeni datumi obrane:

13.- 15. veljače 2012..

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Bojan Jerbić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Franjo Cajner

## SADRŽAJ

IZJAVA.....	3
ZAHVALA.....	4
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	V
SUMMARY .....	VI
1. UVOD .....	1
2. OPIS PROBLEMA.....	4
3. METODA PREDMARKIRANJA POMOĆU JEDNOG KRUŽNOG MARKERA.....	8
3.1. Perspektivna distorzija jednog kružnog markera.....	9
3.2. Određivanje kuta $\alpha$ .....	15
4. METODA PREDMARKIRANJA POMOĆU TRI KRUŽNA MARKERA.....	17
4.1. Određivanje rješenja pomoću dimenzije markera .....	20
4.2. Određivanje koordinata točaka $A'$ , $B'$ i $C'$ .....	24
5. IMPLEMENTACIJA ALGORITMA .....	26
5.1. Provjera rješenja u MATLAB-u .....	26
5.2. Dodatak algoritmu u svrhu dobivanja jedinstvenog rješenja.....	32
5.3. Prikaz konačnih rezultata za provedene primjere.....	36
6. ZAKLJUČAK .....	39
LITERATURA.....	41
PRILOG .....	42

## POPIS SLIKA

Slika 1. Inspekcija i identifikacija predmeta .....	1
Slika 2. Magnetna rezonanca glave čovjeka i satelitska snimka topljenja leda na Antarktiku ..	2
Slika 3. Usporedba kamere i ljudskog oka .....	3
Slika 4. Primjer kontrasta između podloge i predmeta .....	4
Slika 5. Primjer predmeta, koji se nalaze u nesređenoj okolini [5].....	5
Slika 6. Prirodni 3D markeri .....	6
Slika 7. Jedan kružni marker i karakteristične ravnine .....	9
Slika 8. Pojednostavljeni prikaz perspektivne distorzije.....	9
Slika 9. Određivanje duljine $B''O$ .....	11
Slika 10. Trokut $OB'B''$ .....	12
Slika 11. Trokut $A''OA'$ .....	13
Slika 12. Tri kružna markera.....	17
Slika 13: Deformirani krug i deformirana kugla.....	20
Slika 14. Određivanje 3D koordinata točaka $A'$ , $B'$ i $C'$ .....	24
Slika 15. Karakteristični trokuti u programskom paketu CATIA .....	27
Slika 16. Duljine stranica prikazane u CATIA-i .....	30
Slika 17. Koordinate točaka $A'$ , $B'$ i $C'$ prikazane u CATIA-i.....	31
Slika 18. Rješenja trokuta.....	33
Slika 19. Razlika u koordinatama točaka plavog i žutog trokuta.....	33
Slika 20. Odmaknuta ravnina sa istim jednakostraničnim trokutom .....	34
Slika 21. Jednake koordinate $Z$ u kopiranoj i originalnoj ravnini .....	35

## POPIS TABLICA

Tablica 1. Veza između stranica $a$ , $b$ i $c$ te $S$ i $T$ .....	23
Tablica 2. Očitani podaci koordinata točaka te duljine stranice jednakostraničnog trokuta iz programskog paketa CATIA .....	28
Tablica 3. Vrijedosti za $T$ i $S$ .....	28
Tablica 4. Moguća rješenja za $T$ i $S$ .....	29
Tablica 5. Uvjeti za odnos stranica $c < b < a$ .....	29
Tablica 6. Konačno rješenje za $T$ i $S$ .....	30
Tablica 7. Duljine stranica $a$ , $b$ i $c$ izračunate algoritmom u Matlabu .....	30
Tablica 8. Koordinate točaka $A'$ , $B'$ i $C'$ izračunate algoritmom u Matlabu.....	32
Tablica 9. Ulazni podaci konstruiranih primjera u CATIA-i .....	36
Tablica 10. Usporedba rezultata duljina stranica .....	37
Tablica 11. Usporedba rezultata koordinata točaka $A'$ , $B'$ i $C'$ .....	37



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis	Jedinica
$d$	Pomak optičke osi kamere od središta kružnog markera	mm
$f$	Efektivna fokusna duljina kamere	mm
$h'$	Udaljenost između leće kamere i središta kružnog markera	mm
$h$	Projekcija od $h'$ na optičku os kamere	mm
$d_l$	Pomak središta slike od središta kružnice u ravnini slike	mm
$\Delta$	Perspektivna distorzija	mm
$\epsilon$	Relativna važnost distorzije	mm
$R_{min}$	Minimalni polumjer elipse	mm
$R_{max}$	Maksimalni polumjer elipse	mm
$\alpha$	Kut između stranica $OB$ i $OC$ trokuta $OBC$	rad
$\beta$	Kut između stranica $OA$ i $OC$ trokuta $OAC$	rad
$\gamma$	Kut između stranica $OA$ i $OB$ trokuta $OAB$	rad

## SAŽETAK

U ovom diplomskom radu bilo je potrebno, istražujući dostupnu literaturu, pronaći metodu, kojom će se odrediti prostorni položaj predmeta. Za odabranu metodu trebalo je razviti algoritam u programskom paketu MATLAB te potvrditi njegovu valjanost za realne slučajeve.

Metoda, koja je odabrana za određivanje prostornog položaja predmeta, je metoda triangulacije. Metodom triangulacije se na predmet postavljaju tri markera kružnog oblika, čija središta čine jednakokranični trokut.

Prostorne koordinate tih markera određuju se pomoću informacija dobivenih od 2D vizijskog sustava.

Ako su poznati parametri kamere te međusobne prostorne udaljenosti markera na predmetu, moguće je metodom triangulacije pronaći povezanost između 2D koordinata dobivenih sa slike i prostornih koordinata središta markera. Kad se one dobiju, moguće je odrediti položaj predmeta u odnosu na koordinatni sustav kamere.

**KLJUČNE RIJEČI:** vizijski sustav, prostorni položaj predmeta, triangulacija, markeri, robotika

## **SUMMARY**

Relying on available literature and data the objective of this thesis was to determine the method which would define the position of object in 3D space. For the chosen method it was necessary to develop an algorithm in MATLAB and prove its validity and credibility in practice.

The method which was chosen to define object in 3D space was the triangulation method. Triangulation method involved placing three circular markers, whose centres make an equilateral triangle, on the object.

Space coordinates of these markers were determined on the basis of the information obtained from the 2D visual system.

Where camera parameters and space distances between the markers on the object are known, it was possible, applying the triangulation method, to make out the relationship between the 2D coordinates obtained from the picture and the space coordinates defining the centres of the markers. Once this was established, the position of object may be defined relative to the camera coordinate system.

**KEY WORDS:** visual system, orientation and position of objects, triangulation, markers, robotics

## 1. UVOD

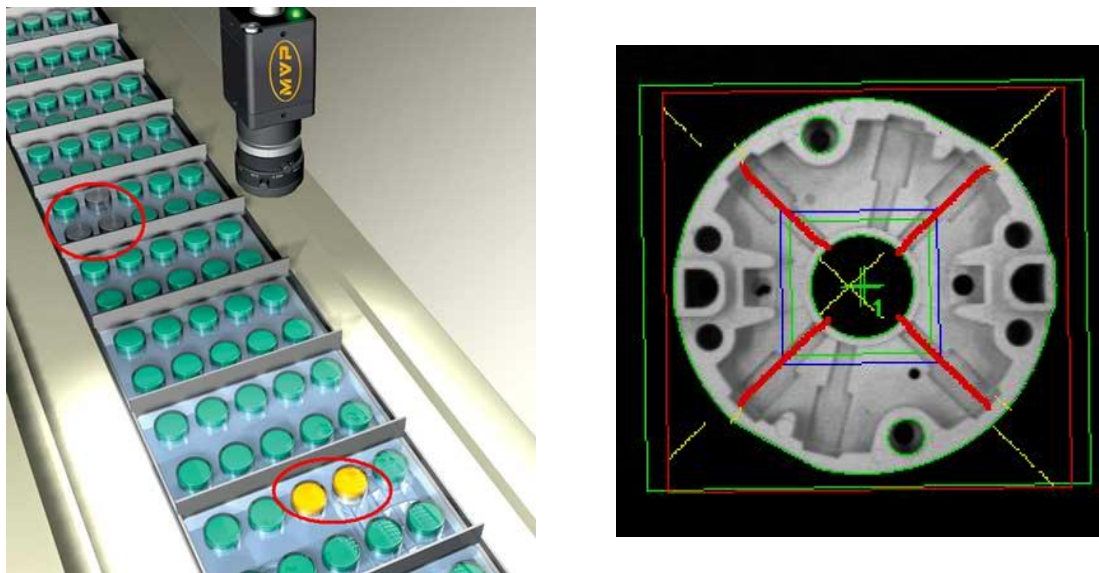
Industrijski roboti spadaju u posebno područje robotike, koje se bavi proučavanjem, konstrukcijom te primjenom različitih robotskih sustava u proizvodnji.

Industrijski robot definiran je kao automatski upravljani, programabilni, višenamjenski manipulacijski stroj, otvorenog kinematičkog lanca s više stupnjeva slobode gibanja, koji može obavljati različite zadatke. Ti zadaci su rutinski, monotoni ili čak opasni za ljude. [1]

Iz razloga što se žele postići humaniziraniji uvjeti rada, strojevi, koji na opasnim mjestima zamjenjuju ljude, trebaju dobiti što više podataka iz okoline. Jedan od načina prikupljanja podataka iz okoline je strojni vid.

Strojni vid se može definirati kao uporaba tehničke naprave (kamere) u svrhu optičkog, beskontaktnog i automatskog prikupljanja informacija o prizoru te njihove daljnje obrade. Strojni vid predstavlja sposobnost računala, odnosno stroja, da „vidi“.

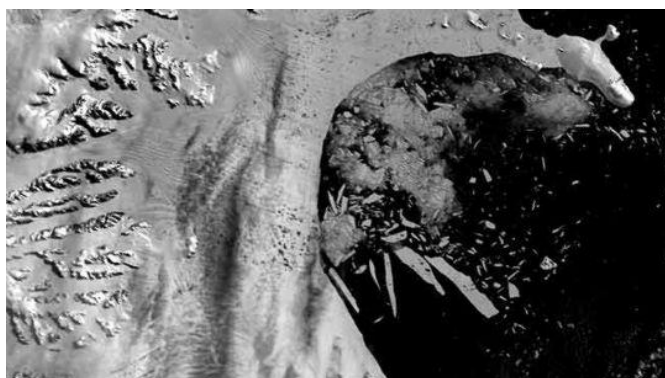
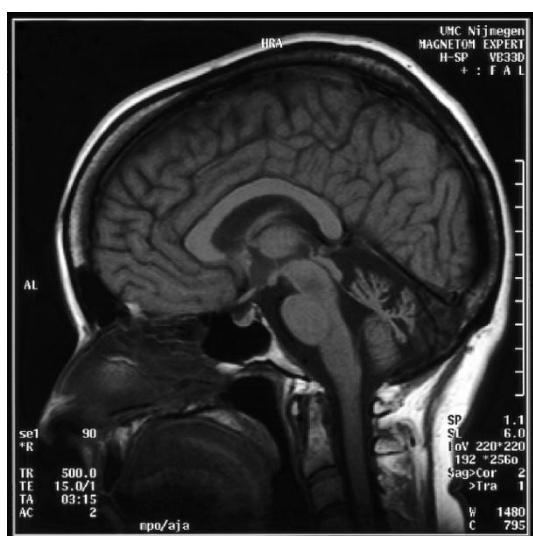
Pomoću vizijskog sustava strojevi vrše inspekciju, identifikaciju i mjerenje različitih predmeta. [2]



Slika 1. Inspekcija i identifikacija predmeta

Cilj strojnog vida je da stvori model realnog svijeta iz prikupljenih slika. On obnavlja korisne informacije o prizoru iz njegovih dvodimenzionalnih projekcija. Kako bi se povratila informacija o nekom prizoru, potrebno je znanje o samom predmetu, koji se proučava, ali i o projekcijskoj geometriji.

Strojni vid može se koristiti u raznim granama industrije, ali i drugim znanostima, kao što su medicina, svemirska istraživanja, meteorologija...



Slika 2. Magnetna rezonanca glave čovjeka i satelitska snimka topljenja leda na Antarktiku

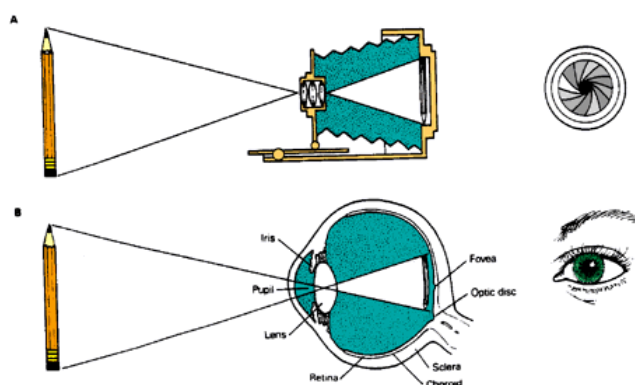
Računalni, odnosno strojni vid, često se smatra dijelom umjetne inteligencije. Umjetna inteligencija je područje znanosti, koje se bavi proučavanjem te razvojem inteligentnih agenata. Intelligentni agent je sustav, koji percipira svoju okolinu te na temelju dobivenih podataka poduzima određene akcije, koje mu povećavaju vjerojatnost za uspjehom.

Umjetna inteligencija može biti podijeljena u tri faze: percepcija, spoznaja i djelovanje. Percepcija prenosi signale, dobivene iz okoline, u simbole, spoznaja manipulira dobivenim simbolima, a djelovanje pretvara simbole u signale, čiji učinak mijenja svijet. [3]

Mnogi dijelovi računalnog vida su usko povezani s onime što je poznato o ljudskom vidu. Ljudski vid započinje u mrežnici oka, točnije, fotoreceptori u mrežnici skupljaju svjetlost i šalju signale u mrežu neurona. Ti se fotoreceptori nazivaju štapići i čunjići.

Štapići su osjetljivi na svjetlo, a čunjići na boju i detalje. Oni proizvode električne impulse koji putuju u mozak. Mozak obrađuje te impulse i daje informacije o tome što mi vidimo. U tom procesu, mnoge komponente ljudskog mozga i oka moraju raditi zajedno.

Oko, kao ljudski „aparat“ za vizualni proces, je vrlo slično kameri. Oboje sakupljaju svjetlo i pretvaraju ga u sliku, koja se kasnije može interpretirati. Snopom svjetlosti upravlja se pomoću leća. Očna leća projicira okrenutu sliku na mrežnicu na isti način kako to radi kamera na film. Uloga leće je da sakuplja snopove svjetlosti, koji se reflektiraju od objekta, i usmjerava ih prema mrežnici ili filmu, kako bi se stvorila stvarna slika.



Slika 3. Usporedba kamere i ljudskog oka

Strojevi, kao i ljudi, na isti način pronalaze objekte u okolini. Recimo, tražeći određenu knjigu, nikad ne čitamo puni naslov svake knjige, već brzo pregledavamo knjige u potrazi za prvim slovom ili nekim od prvih slova naslova koji tražimo. Ili, ako je prijatelj kojeg čekamo visok i plavokos, tražit će se samo ta dva obilježja.

Tako funkcionira i strojni vid. Strojni vid traži unaprijed naučene značajke na predmetu te ga prema njima prepoznaje.

Nebitne informacije nastoje se ne obrađivati, već se zahvaćaju samo neki aspekti objekta, koji su nužni za obavljanje uspješne pretrage. To područje psihologije naziva se prepoznavanje oblika i na njemu se temelji svaki vizijski proces. [4]

## 2. OPIS PROBLEMA

Vizijski sustavi pokazali su se vrlo korisnim, kao pomoć, prilikom izvršavanja različitih zadataka, posebno kod industrijskog sklapanja te kontrole proizvodnog procesa.

Jedan od osnovnih zadataka robotskog vizijskog sustava je prepoznati i odrediti položaj te orijentaciju dijelova, koje treba sklopiti. No, postoji i nekoliko problema, koji se javljaju prilikom izvršavanja navedenog zadatka, koje je vrijedno spomenuti.

Prije svega, robotski vizijski sustav mora razlikovati dio od podloge na kojoj se on nalazi. Najčešći problem, koji se javlja u ovoj, prvoj fazi, je nemogućnost prepoznavanja predmeta u realnom vremenu zbog nejednakog osvjetljenja. Uz kontinuirano osvjetljenje, koje je naprosto nužno za pravilno funkcioniranje svakog vizijskog procesa, ovaj problem se može riješiti tako da podloga, na kojoj se predmet nalazi, bude kontrastne boje u odnosu na predmet. Na primjer, ako je predmet bijele, podloga bi trebala biti crne boje.

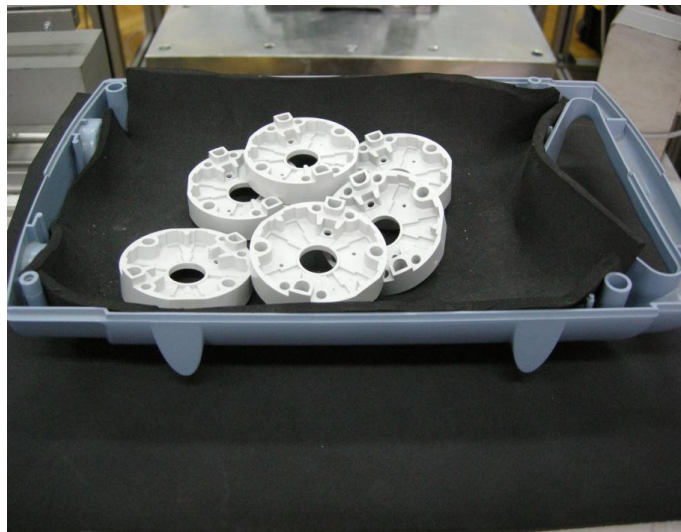


Slika 4. Primjer kontrasta između podloge i predmeta

Drugi problem je određivanje orijentacije i pozicije predmeta. Današnji softveri mogu jednostavno odrediti poziciju i orijentaciju predmeta, ako se on nalazi u ravnini, koja je paralelna s podlogom i u kojoj je napravljena kalibracija.

No, problem se javlja kad se predmet nalazi u nesređenoj okolini, recimo razbacan u kutiji, ili kad je nagnut pod nekim kutem. Tada određivanje orijentacije i pozicije predmeta može biti otežano iz razloga što se geometrijske značajke, prema kojima se predmet prepoznaje, pod nagibom deformiraju do neprepoznatljivosti.

Na primjer, kružnica, pod nagibom, poprima oblik elipse.



Slika 5. Primjer predmeta, koji se nalaze u nesređenoj okolini [5]

Ideja za temu ovog diplomskog rada, proizašla je upravo iz gore navedenih problema, s kojima sam se susrela prilikom izrade završnog rada. Kako je najveći problem bila geometrija predmeta, koju je softver teško prepoznavao, kad se predmet nalazio nagnut pod nekim kutem, želja je bila pronaći način, odnosno metodu, koja će te problem deformacije geometrije umanjiti ili čak eliminirati.

Istražujući dostupnu literaturu, došla sam do zaključka da bi se problem određivanja pozicije i orijentacije predmeta, kad se on nalazi u nesređenoj okolini ili nagnut pod nekim kutem, mogao riješiti uporabom markera.

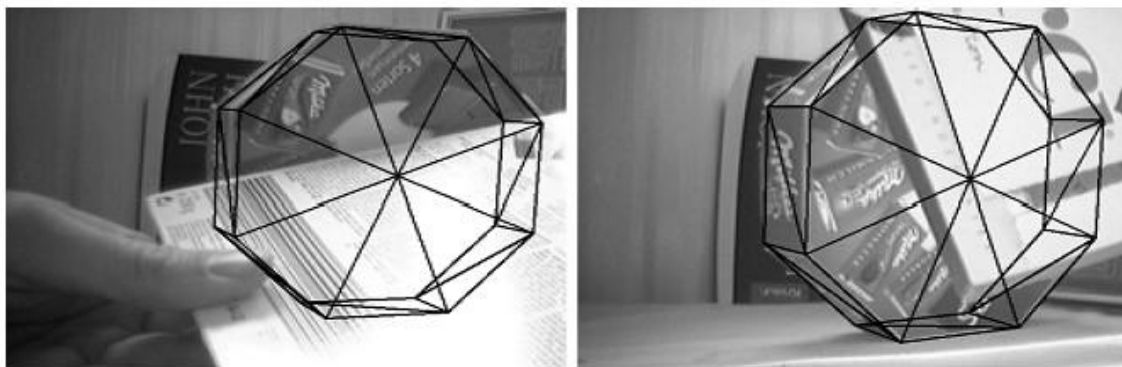
Markeri su oznake, jednostavne geometrije, koji se postavljaju na predmet. Tu jednostavnu geometriju, softver lakše i brže prepoznaje, od složene geometrije cijelog predmeta. [6]

Iz razloga što postoje mnoge metode određivanja pozicije i orijentacije predmeta, koje koriste markere, bilo je potrebno odrediti onu, koja će se analizirati i testirati u diplomskom radu.

Prva metoda, koja je bila interesantna te se uzela u razmatranje, je ona, koja koristi prirodne 3D markere za prepoznavanje predmeta u realnom vremenu. [7]



Prirodni 3D markeri predstavljaju skup od četiri do pet točaka, koje imaju karakteristične geometrijske značajke. One se grupiraju na način, koji garantira njihovo prepoznavanje i vidljivost iz barem jedne točke gledišta.



Slika 6. Prirodni 3D markeri

Druga metoda, koja je bila razmatrana kao ideja, se bazira na procesu predmarkiranja s jednim ili više markera, kružnog oblika. [8]

Kružna geometrija markera odabrana je iz nekoliko razloga. Prije svega, mnogi industrijski dijelovi imaju provrte, koji se mogu iskoristiti kao „prirodni“ kružni markeri. Nadalje, iz geometrije je poznato da krug ima jednaku simetriju s obzirom na sve osi. Na kraju, dokazano je da krugovi imaju svojstvo visoke lokacijske točnosti na slici.

Metoda predmarkiranja opisana je analitički te je zaključeno da se bolja preciznost u određivanju orijentacije i pozicije predmeta dobije, ako se koriste tri kružna markera, čija središta čine jednakostranični trokut.

Od dvije predstavljene metode u ovom poglavlju, biti će odabrana druga, zato što je prva metoda još uvijek u procesu istraživanja te nije pronađeno dovoljno podataka o samom algoritmu.

U sljedećim poglavljima biti će analitički opisana metoda predmarkiranja, prvo s jednim, a kasnije s tri markera.

Zatim će biti predstavljen algoritam, koji koristi metodu predmarkiranja s tri kružna markera, iz razloga što jedan kružni marker ne daje dovoljnu točnost o poziciji i orijentaciji predmeta.

Taj algoritam napravljen je u programskom paketu MATLAB.

Na kraju će se analizirati dobiveni rezultati te zaključiti da li se metoda predmarkiranja s tri kružna markera može upotrijebiti za realan slučaj.

### 3. METODA PREDMARKIRANJA POMOĆU JEDNOG KRUŽNOG MARKERA

U slučaju jednog kružnog markera, koji se nalazi na predmetu, standardni pogled se ostvaruje na način da se optička os kamere poravna sa normalom površine, koja prolazi kroz središte kružnog markera, uz pretpostavku da su poznati unutarnji i vanjski parametri kamere, kao što su efektivna fokusna duljina kamere, udaljenost kamere od predmeta itd.

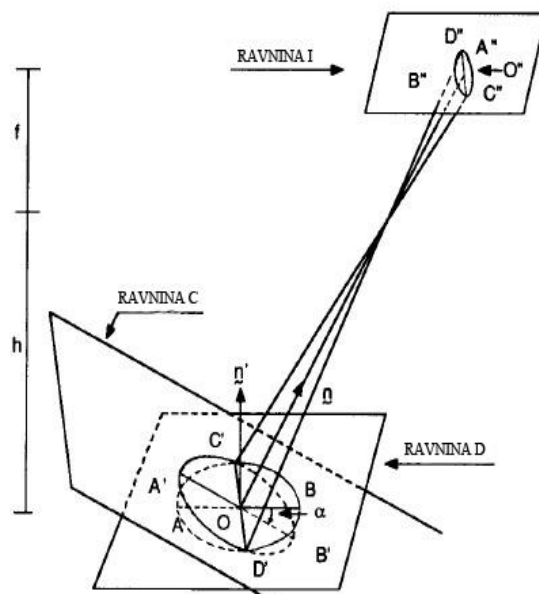
Na temelju ovih parametara koristi se idealni projekcijski model, kako bi se izvele jednačbe za izračunavanje perspektivne distorzije, odnosno izobličenja.

Relativna pozicija i orijentacija kamere, u odnosu na kružni marker, može se svrstati u jedan od ova četiri slučaja:

- (1) Optička os kamere prolazi kroz središte kružnog markera te je okomita na ravninu u kojoj se on nalazi (na slici 6. označena kao ravnina  $C$ )
- (2) Optička os kamere je okomita na ravninu  $C$ , ali ne prolazi kroz središte kružnog markera
- (3) Optička os kamere prolazi kroz središte kružnog markera, ali nije okomita sa ravninom  $C$
- (4) Optička os kamere nije okomita na ravninu  $C$  i pomaknuta je od središta kružnog markera

Matematički će se obraditi zadnji, odnosno četvrti, slučaj iz razloga što je on najopćenitiji te su u njemu sadržani ostali navedeni slučajevi.

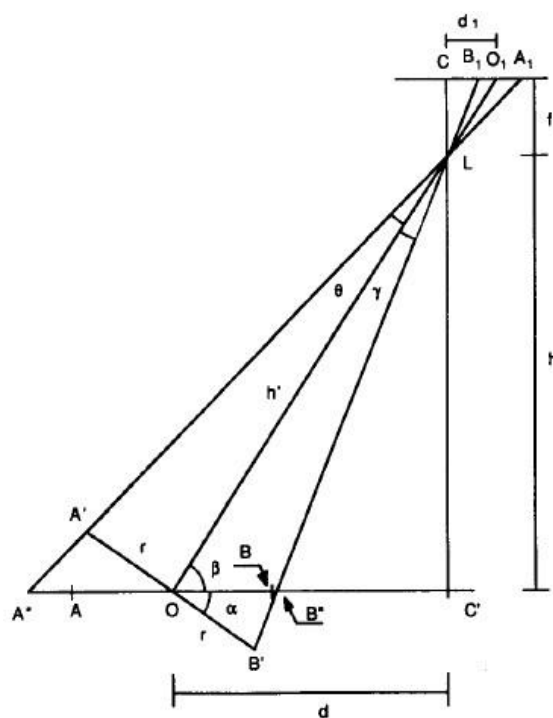
Na slici 6. vidljive su tri karakteristične ravnine; ravnina  $I$  predstavlja ravninu u kojoj se nalazi slika, ravnina  $C$  je ravnina u kojoj se nalazi kružni marker, a ravnina  $D$  je ravnina koja je paralelna sa ravninom  $I$  te prolazi središtem kružnog markera.



Slika 7. Jedan kružni marker i karakteristične ravnine

### 3.1. Perspektivna distorzija jednog kružnog markera

Perspektivna distorzija se za slučaj četiri, opisan u prethodnom poglavlju, može odrediti pomoću sljedeće slike, gdje je:



Slika 8. Pojednostavljeni prikaz perspektivne distorzije

$d$ - pomak optičke osi kamere  $CC'$  od središta kružnog markera  $O$

$f$ - efektivna fokusna duljina kamere ( $CL$ )

$h'$ - je udaljenost između leće kamere i središta kružnog markera

$h$ - projekcija od  $h'$  na optičku os kamere

$r$ - radijus markera

$\alpha$ - kut između ravnine  $C$  i  $D$

$d_I$ - pomak središta slike od središta kružnice ( $CO_I$ ) u ravnini slike

Perspektivna distorzija definira se na sljedeći način:

$$\Delta = \overline{O_1A_1} - \overline{O_1B_1} \quad (1)$$

Iz slike 7. vidljivo je da su trokuti  $OB''L$  i  $B_1O_1L$  i trokuti  $A''OL$  i  $O_1A_1L$  slični, pa se taj zaključak može i matematički zapisati:

$$\Delta OB''L \approx \Delta B_1O_1L \quad (2)$$

$$\Delta A''OL \approx \Delta O_1A_1L$$

Iz sličnosti trokuta zaključuje se da je,

$$\frac{\overline{OB''}}{\overline{B_1O_1}} = \frac{h}{f} \quad (3)$$

te se iz ovog omjera može dobiti čemu je jednaka duljina  $B_1O_1$ , koja je potrebna za izračunavanje distorzije u jednadžbi (1).

$$\overline{B_1O_1} = \frac{\overline{OB''}f}{h} \quad (4)$$

Istu stvar potrebno je napraviti za duljinu  $A_1O_1$ .

Dakle, iz sličnosti trokuta može se napisati da je,

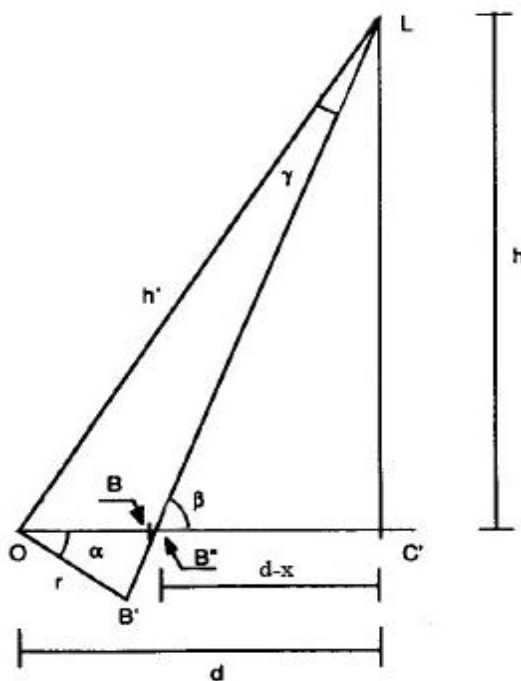
$$\frac{\overline{A''O}}{\overline{O_1A_1}} = \frac{h}{f} \quad (5)$$

te se može izvesti čemu je jednaka duljina  $\overline{O_1A_1}$ , kako je prikazano u jednadžbi (6).

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{A''O}f}{h} \quad (6)$$

Ako se detaljnije pogledaju prikazane jednadžbe, vidljivo je da je za izračunavanje perspektivne distorzije potrebno odrediti nepoznate duljine  $\overline{A''O}$  i  $\overline{B''O}$ .

Prvo će biti prikazano kako se određuje nepoznata duljina  $\overline{B''O}$ , koja je prikazana na slici 8.

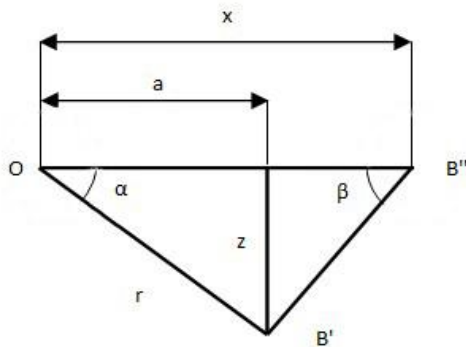


Slika 9. Određivanje duljine  $\overline{B''O}$

Iz trokuta  $B''C'L$  moguće je odrediti da je:

$$\tan \beta = \frac{h}{d-x} \quad (7)$$

Ako se detaljnije pogleda trokut  $OB'B''$ , koji je prikazan na slici 9., može se izračunati sljedeće:



Slika 10. Trokut  $OB'B''$

$$\sin \alpha = \frac{z}{r} \rightarrow z = r \sin \alpha \quad (8)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \rightarrow a = r \cos \alpha$$

Isto tako, poznato je da je:

$$\tan \beta = \frac{z}{x - a} \quad (9)$$

Ako se jednačba (7) uvrsti u jednačbu (9) dobije se:

$$\frac{h}{(d - x)} = \frac{z}{x - a} = \frac{r \sin \alpha}{x - r \cos \alpha} \quad (10)$$

Slijedi da je:

$$\frac{h}{d - x} = \frac{r \sin \alpha}{x - r \cos \alpha} \quad (11)$$

Rješavanjem omjera u jednačbi (11), dobije se izraz opisan u jednačbi (12).

$$h(x - r \cos \alpha) = (d - x)r \sin \alpha \quad (12)$$

Na kraju, moguće je dobiti izraz za veličinu  $x$ , koja je jednaka duljini  $OB''$ .

$$x = \frac{r(d \sin \alpha + h \cos \alpha)}{(h + r \sin \alpha)} \quad (14)$$

$$x = OB'' \quad (15)$$

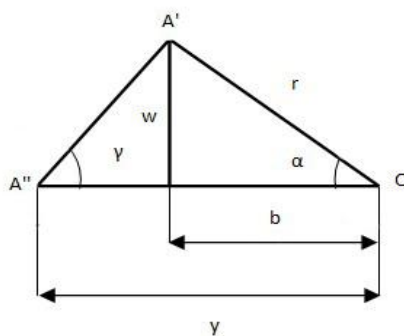
Sličnu stvar potrebno je napraviti kako bi se dobila duljina  $A''O$ .

Iz trokuta  $A''C'L$ , koji se može vidjeti na slici 7., dobije se da je,

$$\tan \gamma = \frac{h}{d + y} \quad (16)$$

gdje se duljina  $y$  najbolje može vidjeti na slici 10.

Zatim je potrebno detaljnije pogledati trokut  $A''OA'$ , koji je prikazan na slici 10., kako bi se odredili sljedeći omjeri:



Slika 11. Trokut  $A''OA'$

$$\sin \alpha = \frac{w}{r} \rightarrow w = r \sin \alpha \quad (17)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{r} \rightarrow b = r \cos \alpha$$



Isto tako, iz slike 10., može se zaključiti da je:

$$\tan \gamma = \frac{w}{y - b} \quad (18)$$

Ako se jednačba (16) uvrstiti u jednačbu (18) dobije se:

$$\frac{h}{d + y} = \frac{w}{y - b} \quad (19)$$

Jednačba (19) može se zapisati na sljedeći način:

$$h(y - b) = w(d + y) \quad (20)$$

Iz jednačbe (20) izrazi se  $y$ , koji predstavlja nepoznatu duljinu stranice  $A''O$ .

$$y = \frac{rd \sin \alpha + rh \cos \alpha}{h - r \sin \alpha} \quad (21)$$

$$y = A''O \quad (22)$$

Konačni izraz za perspektivnu distorziju je:

$$\Delta = \frac{(d \sin \alpha + h \cos \alpha)r f}{h - r \sin \alpha} \frac{f}{h} - \frac{r(d \sin \alpha + h \cos \alpha) f}{(h + r \sin \alpha)} \frac{f}{h} \quad (23)$$

Relativna važnost distorzije može se definirati kao,

$$\epsilon = \frac{O_1 A_1 - O_1 B_1}{O_1 A_1 + O_1 B_1} = \frac{\Delta}{O_1 A_1 + O_1 B_1} \quad (24)$$

Izraz (24) može se pojednostaviti na sljedeći način:

$$\epsilon = \frac{r \sin \alpha}{h} \quad (25)$$

Kako je vidljivo iz pojednostavljene jednačbe (25),  $\epsilon$  je funkcija  $r$ ,  $h$  i kuta  $\alpha$  te je neovisno o udaljenosti pomaka optičke osi kamere  $d$ .

Na primjer, ako je  $r = 5 \text{ mm}$  i  $h = 500 \text{ mm}$ , najveća vrijednost  $\epsilon$  će se pojaviti kad je  $\alpha = 90^\circ$  i biti će manja ili jednaka 1%. Zaključuje se da je distorzija, u realnim situacijama, kao što je gore naveden primjer, zapravo beznačajna.

Ipak, jednačba (23) prikazuje da je u nekom općenitom slučaju, distorzija funkcija  $f$ ,  $h$ ,  $r$ ,  $\alpha$  i  $d$ . Dakle, za vrijednosti gdje vrijedi da je  $\frac{h}{r} \geq 10$ , što je istinito u najvećem broju stvarnih slučajeva, jednačba (23) prelazi u oblik:

$$\Delta = \frac{r^2}{h^2} \left[ f \left( \sin 2\alpha + \frac{2d}{h} \sin^2 \alpha \right) \right] \quad (25)$$

Ako ne postoji pomak osi kamere, dakle  $d = 0$ , jednačba (25) izgleda ovako:

$$\Delta = \frac{r^2}{h^2} f \sin 2\alpha \quad (26)$$

Preostaje odrediti kut  $\alpha$ . Način, na koji se određuje kut  $\alpha$ , biti će prikazan u sljedećem poglavlju.

### 3.2. Određivanje kuta $\alpha$

Bitno je napomenuti da se prilikom nagiba, slika kružnog markera deformira, te kružnica prelazi u elipsu, koja ima dva polumjera  $R_{min}$  i  $R_{max}$ .

$$R_{min} = f \frac{r}{h} \quad (27)$$

$$R_{max} = \frac{1}{2} (O_1 A_1 + O_1 B_1)$$

Za slučajeve gdje vrijedi da je  $\frac{h}{r} \geq 10$ , može se pisati da je:

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} \cong \cos \alpha + \frac{d}{h} \sin \alpha \quad (28)$$

Ako nema pomaka kamere, dakle  $d = 0$ , jednadžba (28) prelazi u jednostavniji oblik,

$$\frac{R_{min}}{R_{max}} \cong \cos \alpha \quad (29)$$

iz kojeg je vidljivo da omjer minimalnog i maksimalnog polumjera ovisi samo o kosinusu kuta  $\alpha$ .

Za slučajeve (1) i (2), opisanim u poglavlju 3., vrijedi da je  $\alpha=0$ , a omjer minimalnog i maksimalnog polumjera jednak 1.

Kako bi se odredio kut  $\alpha$  iz jednadžbe (28), potrebno je izračunati pomak kamere. Pomak kamere lako se može, iz sličnosti trokuta, odrediti iz skice na slici 7., kako slijedi,

$$d = \frac{hd_1}{f} \quad (30)$$

uz napomenu da se  $d_1$  određuje iz slike, dobivene kamerom.

Jednadžba (30) uvrštava se u jednadžbu (28) te se dobiva konačan izraz za izračunavanje kuta  $\alpha$ .

$$\sin \alpha = \frac{\frac{R_{min}}{R_{max}} \frac{d_1}{f} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{d_1}{f}\right)^2 - \left(\frac{R_{min}}{R_{max}}\right)^2}}{1 + \left(\frac{d_1}{f}\right)^2} \quad (31)$$

Prije korištenja jednog kružnog markera, kao metode predmarkiranja, potrebno je razmisliti o jednoj vrlo bitnoj činjenici, a ona je stupanj točnosti prilikom određivanja  $R_{min}$  i  $R_{max}$ , ali i kuta  $\alpha$ .

Problem se pojavljuje kad je kružni marker jako mali u odnosu na udaljenost između kamere i podloge na kojoj se marker nalazi. Male promjene u nagibu podloge možda neće biti uočene na kameri te će iz tog razloga doći do smanjenja točnosti rezultata.

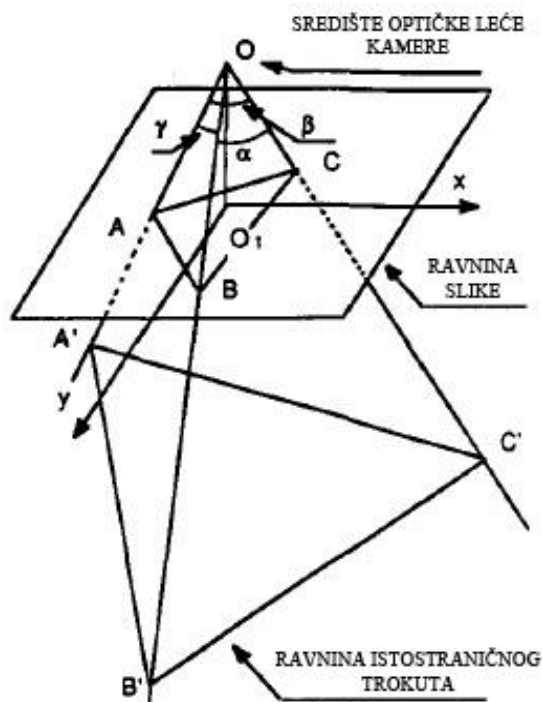
Kao alternativa ovoj metodi, javlja se metoda predmarkiranja sa tri kružna markera, koja će detaljnije biti objašnjena u sljedećem poglavlju.

#### 4. METODA PREDMARKIRANJA POMOĆU TRI KRUŽNA MARKERA

Kod ove metode potrebno je proučiti relativne pozicije središta tri kružna markera te njihove međusobne odnose.

Ako se na neki predmet postave tri kružna markera, čija središta čine jednakostranični trokut, te se snime kamerom, tada dobivena slika neće prikazati jednakostranični trokut, osim kad je optička os kamere poravnata sa normalom površine jednakostraničnog trokuta.

Drugim riječima, kad je predmet, na kojem se nalaze markeri, nagnut pod nekim kutem, kamera, koja je postavljena iznad njega, snimit će sliku, na kojoj će međusobna udaljenost središta markera biti različita. Dakle, kamera će prikazivati raznostraničan trokut.



Slika 12. Tri kružna markera

Vrhovi raznostraničnog trokuta označeni su slovima  $A$ ,  $B$  i  $C$ , dok su kod istostraničnog trokuta, koji se u realnom slučaju nalazi na predmetu, oni označeni slovima  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ . Točka  $O$  predstavlja središte optičke leće kamere. Ravnina, u kojoj se nalazi središte optičke leće kamere, je paralelna sa ravninom slike.

Koordinate točkaka  $O$ ,  $A$ ,  $B$  i  $C$ , prikazane na slici 11., su poznate. Pomoću kosinusovog poučka, mogu se izračunati kutevi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , zato što su poznate dužine  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  i  $\overline{OC}$ .

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{BO} \overline{CO}} \\ \cos \beta &= \frac{\overline{AO}^2 + \overline{CO}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{AO} \overline{CO}} \\ \cos \gamma &= \frac{\overline{BO}^2 + \overline{AO}^2 - \overline{AC}^2}{2\overline{BO} \overline{AO}}\end{aligned}\tag{32}$$

Duljina stranica se, općenito, izračunava prema jednadžbi,

$$d(T_1 T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\tag{33}$$

koja se primjenjuje i u ovom slučaju, za izračunavanje duljina stranica  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  i  $\overline{OC}$ .

Kako su poznate koordinate točkaka  $A$ ,  $B$  i  $C$  te kutevi  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , potrebno je odrediti koordinate točkaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  te time orijentaciju ravnine, koja presijeca dužine  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$  i  $\overline{OC}$  i u kojoj se nalazi jednakostranični trokut.

Prije svega, iz kosinusovog poučka moguće je napisati,

$$c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2 - 2ab \cos \gamma\tag{34}$$

$$c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 - 2ab \cos \gamma\tag{35}$$

gdje je  $OA' = a$ ,  $OB' = b$ ,  $OC' = c$  i  $A'B' = A'C' = B'C'$ .

Ako se gore navedene jednadžbe pomnože sa  $1/b^2$ , dobije se:

$$\frac{c^2}{b^2} - 2\frac{c}{b} \cos \alpha = \frac{a^2}{b^2} - 2\frac{a}{b} \cos \gamma\tag{36}$$

$$\frac{c^2}{b^2} - 1 = 2 \frac{ac}{b^2} \cos \beta - 2 \frac{ab}{b^2} \cos \gamma \quad (37)$$

Sad je potrebno uvesti jednakosti da je,

$$T = \frac{c}{b} \quad (38)$$

$$S = \frac{a}{b} \quad (39)$$

pa se jednačba (37) može zapisati na sljedeći način:

$$T^2 - 1 = S(2T \cos \beta - 2 \cos \gamma) \quad (40)$$

Konačne jednačbe za omjere duljina stranica  $a, b$  i  $c$  su:

$$S = \frac{T^2 - 1}{2T \cos \beta - 2 \cos \gamma} \quad (41)$$

$$T^2 - 2T \cos \alpha = S^2 - 2S \cos \gamma \quad (42)$$

Kad se jednačba (41) uvrsti u jednačbu (42) te sredi, dobije se jednačba četvrtog reda,

$$T^4 + NT^3 + PT^2 + QT + R = 0 \quad (43)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} N &= \frac{-4 \cos \beta \cos \gamma - 8 \cos \alpha \cos^2 \beta}{4 \cos^2 \beta - 1} \\ P &= \frac{16 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 2}{4 \cos^2 \beta - 1} \\ Q &= \frac{-8 \cos \alpha \cos^2 \gamma - 4 \cos \beta \cos \gamma}{4 \cos^2 \beta - 1} \\ R &= \frac{4 \cos^2 \gamma - 1}{4 \cos^2 \beta - 1} \end{aligned} \quad (44)$$

Kako je već prije spomenuto,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  i  $\cos \gamma$  imaju jedinstvene i realne vrijednosti pa se zaključuje da  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  i  $R$  moraju isto biti realni brojevi te imati jedinstvene vrijednosti. Dakle, jednačba (43) može imati najviše četiri rješenja.

Isto tako, omjeri  $a/b$  i  $c/b$  su pozitivni, pa iz tog razloga, samo pozitivna rješenja za  $T$ , iz jednačbe (43), te pozitivna rješenja za  $S$ , iz jednačbe (42), su prihvatljiva.

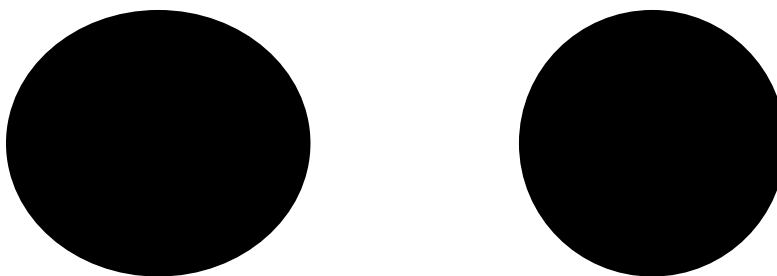
Nadalje, rješavanjem jednačbe (43), teoretski je moguće dobiti četiri pozitivna rješenja za  $T$  i za  $S$ . Iz razloga što postoji jedna normala površine, u kojoj se nalazi jednakostranični trokut, samo je jedno, od četiri moguća rješenja, prihvatljivo. [6]

Način, na koji će se odrediti prihvatljivo rješenje, biti će prikazan u sljedećem poglavlju.

#### 4.1. Određivanje rješenja pomoću dimenzije markera

Prva pretpostavka, koja mora biti zadovoljena, je da svi markeri imaju jednake dimenzije, odnosno polumjere. Markeri mogu imati oblik kruga, dakle 2D lika, ili kugle, 3D tijela.

Razlika je u tome što se krug, prilikom naginjanja predmeta, deformira i na slici poprima oblik elipse, a iz geometrije je poznato da elipsa ima dva polumjera, manji i veći.



Slika 13: Deformirani krug i deformirana kugla

S druge strane, kad se kamerom snimi marker oblika kugle, koji je nagnut pod nekim kutem, na slici će biti prikazan krug, koji će imati jedan polumjer. Postojati će razlika u dimenziji polumjera prije i nakon naginjanja predmeta.

Iz razloga što je potrebno mjeriti dimenziju samo jednog polumjera, bolje je upotrebljavati markere oblika kugle, ako je to moguće.

Sljedeća pretpostavka je da će polumjeri markera biti različiti, ovisno o nagibu predmeta na kojem se nalaze. Drugim riječima, ako je polumjer markera najmanji, može se zaključiti da je u tom smjeru predmet najviše nagnut. Odnosno, da je dužina, koja spaja središte optičke leće kamere sa tim vrhom trokuta, najdulja. Vrijedi i obrnuto; ako je izmjereni polumjer najveći, stranica, koja spaja središte optičke leće kamere, sa tim vrhom trokuta, biti će najkraća. Za polumjer, koji će biti srednjih dimenzija, biti će vezana srednja duljina stranice između središta optičke leće kamere i tog vrha trokuta.

Tri stranice  $a$ ,  $b$  i  $c$ , koje spajaju središte optičke leće kamere, sa vrhovima  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  (slika 11.), jednakostraničnog trokuta, mogu biti u sljedećim odnosima:

$$\begin{array}{lll} a \geq b \geq c & a \geq c \geq b & b \geq a \geq c \\ b \geq c \geq a & c \geq a \geq b & c \geq b \geq a \end{array}$$

Iz jednadžbi (38) i (39) moguće je dobiti čemu su jednake stranice  $a$  i  $c$ .

$$c = bT \tag{45}$$

$$a = bS \tag{46}$$

Kako je vidljivo iz jednadžbi (45) i (46), potrebno je izračunati stranicu  $b$ , da bi se mogle dobiti realne vrijednosti za stranice  $a$  i  $c$ .

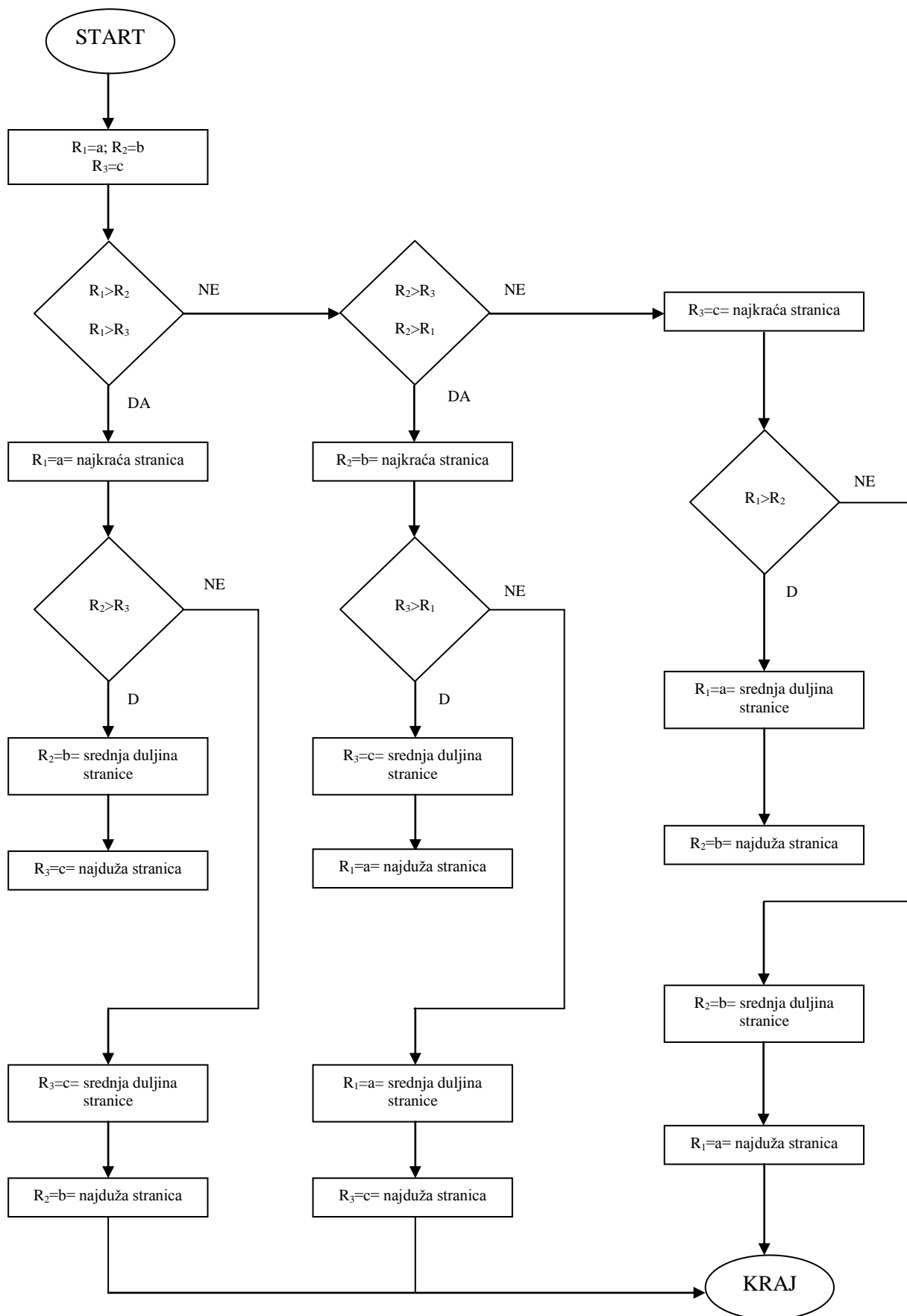
Ako se bolje pogleda slika 11., iz nje se jasno vidi da je poznat kut  $\alpha$ , stranica  $c$  te dužina  $\overline{B'C'}$ . Prema kosinusovom poučku slijedi:

$$b = \sqrt{\frac{\overline{B'C'}^2}{(1 + T^2 - 2T \cos \alpha)}} \tag{47}$$

Ista jednadžba dobila bi se da se koristio kut  $\gamma$ , stranica  $a$  te dužina  $\overline{A'B'}$ .

Sad, kad su poznate jednadžbe za sve stranice, moguće je pronaći vezu između tih stranica i veličina polumjera. Ta veza biti će prikazana u dijagramu toka.





Isto tako, postoji veza između omjera  $S$  i  $T$ , i stranica  $a, b$  i  $c$ . Ako je:

$$S < T \rightarrow a < c$$

$$S > T \rightarrow a > c$$

$$S > 1 \rightarrow a > b$$

$$S < 1 \rightarrow a < b$$

$$T > 1 \rightarrow c > b$$

$$T < 1 \rightarrow c < b$$

U tablici 1. prikazani su uvjeti, koji moraju biti zadovoljeni, ako postoji određen odnos veličine između stranica  $a, b$  i  $c$ .

**Tablica 1. Veza između stranica  $a, b$  i  $c$  te  $S$  i  $T$**

$a < b < c$	$S < T$ $S < 1$ $T > 1$
$a < c < b$	$S < T$ $S < 1$ $T < 1$
$b < c < a$	$S > T$ $S > 1$ $T > 1$
$b < a < c$	$S < T$ $S > 1$ $T > 1$
$c < a < b$	$S > T$ $S < 1$ $T < 1$
$c < b < a$	$S > T$ $S > 1$ $T < 1$

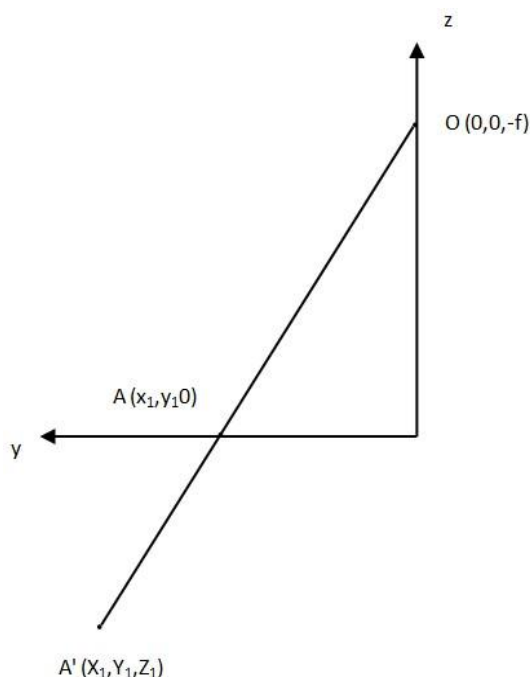
Iz navedenih zakonitosti i veza prikazanih između  $S$  i  $T$  te stranica  $a, b$  i  $c$ , trebalo bi se, od četiri moguća, dobiti jedinstveno rješenje.

## 4.2. Određivanje koordinata točaka $A'$ , $B'$ i $C'$

Zadnji korak je odrediti 3D koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ .

Dakle, poznate su koordinate središta optičke leće kamere te koordinate točka  $A$ ,  $B$  i  $C$ , koje se mogu očitati analiziranjem slike dobivene kamerom. Isto tako, u prethodnom poglavlju detaljno je objašnjeno na koji način se dobiju duljine stranica  $a, b$  i  $c$ , odnosno duljine  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OB'}$  i  $\overline{OC'}$ .

Nepoznate 3D koordinate mogu se odrediti iz jednadžbe pravca. U ovom poglavlju prikazat će se postupak za određivanje koordinata točke  $A'$ . Postupak za određivanje koordinata točaka  $B'$  i  $C'$  biti će identičan.



Slika 14. Određivanje 3D koordinata točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$

Početna jednadžba, koja će se koristiti, za određivanje koordinata točke  $A'$  je jednadžba pravca, koji prolazi kroz dvije točke.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (48)$$

Nakon uvrštavanja koordinata točke  $O$  te sređivanja jednadžbe (48), dobije se da je:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z+f}{f} \quad (49)$$

Sad je moguće odrediti jednadžbe za nepoznate koordinate  $X_I$  i  $Y_I$ .

$$X_1 = \frac{Z_1 + f}{f} x_1 \quad (50)$$

$$Y_1 = \frac{Z_1 + f}{f} y_1 \quad (51)$$

Kako je vidljivo iz jednadžbi (50) i (51), nepoznata je koordinata  $Z_I$ . Ona će se odrediti iz jednadžbe (52).

$$a^2 = (X_1^2 + Y_1^2) + (Z_1 + f)^2 \quad (52)$$

Nakon sređivanja jednadžbe (52), dobije se konačni izraz za koordinatu točke  $Z_I$ .

$$Z_1 = -f \pm \frac{af}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + f^2}} \quad (53)$$

Za koordinatu  $Z_I$  dobit će se dva rješenja; jedno pozitivno, a drugo negativno. Odabire se negativno rješenje kao konačno, zato što se prema skici, točka  $A'$ , uvijek nalazi ispod središta optičke leće kamere, odnosno točke  $O$ .

## 5. IMPLEMENTACIJA ALGORITMA

Algoritam za određivanje prostornog položaja objekta metodom triangulacije napravljen je u MATLAB programskom alatu. MATLAB je kratica od MATrix LABoratory te predstavlja programsko okruženje.

Nastao je 1970-ih godina na Sveučilištu Novog Meksika. Omogućava rad s matricama, nudi iscertavanje funkcija i podataka, jednostavnu implementaciju algoritama i mnoge druge stvari. Popularan je i kao alat za obradu slike. Također, nudi i sučelje s programima napisanim u drugim programskim jezicima, kao što su C, C++ te Fortran.

MATLAB nije namijenjen specifičnoj primjeni te se koristi kao alat u mnogim područjima znanosti, kao što su računarstvo, mehanika, ekonomija i mnoge druge.

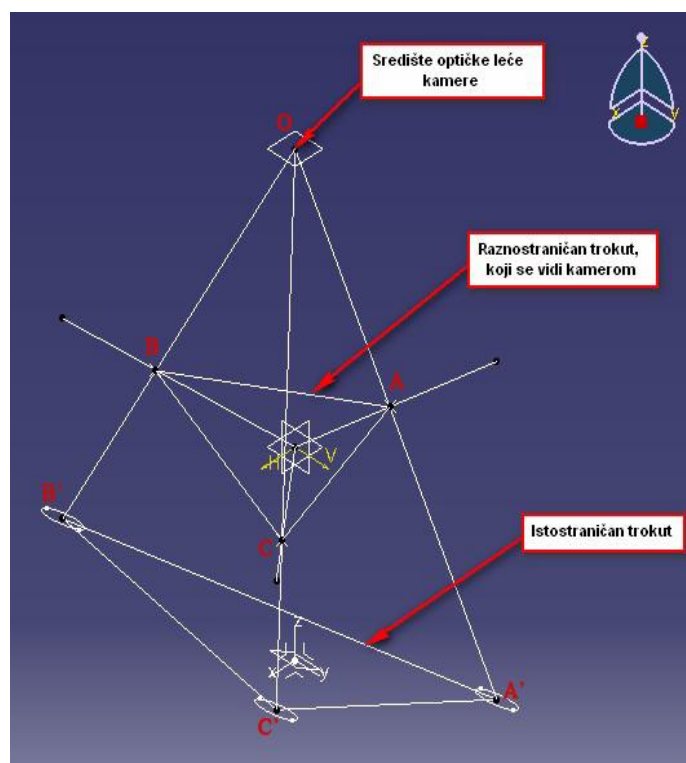
MATLAB programski jezika je skriptnog tipa. Naredbe mogu biti direktno napisane u komandni prozor ili mogu biti spremljene u tekstualnoj datoteci, kao što je MATLAB skripta. [7]

### 5.1. Provjera rješenja u MATLAB-u

Rješenje algoritma dobiveno u MATLAB-u, kontrolirat će se konstrukcijskim primjerima oblikovanim u programskom paketu CATIA V5 R18. Cijeli algoritam te njegova struktura, mogu se vidjeti u prilogu diplomskog rada.

CATIA (Computer Aided Three-dimensional Interactive Application) je više-platformni CAD/CAM/CAE komercijalni softverski paket razvijen u Francuskoj, od strane Dassault Systemes-a. [10]

Kako je vidljivo iz slike 14., u programskom paketu CATIA konstruirani su svi bitni elementi, koji će poslužiti kao kontrola rješenja dobivenih algoritmom.



Slika 15. Karakteristični trokuti u programskom paketu CATIA

Postoje tri ravnine, koje je bitno uočiti. Prva ravnina je ravnina u kojoj se nalazi središte optičke leće kamere, na slici označeno s  $O$ .

Druga ravnina je ravnina u kojoj se nalazi raznostraničan trokut  $ABC$  i paralelna je s ravinom u kojoj se nalazi središte optičke leće kamere.

Treća ravnina je ravnina u kojoj se nalaze kružni markeri jednakih dimenzija, čija središta čine jednakostraničan trokut. Ona nije paralelna s druge dvije, već je zakrenuta oko  $x$ ,  $y$  ili  $z$  osi za neki proizvoljan kut  $\alpha$ . Zakretanje ravnine je simulacija stvarne situacije, gdje se predmet nalazi nagnut pod nekim kutem ili u nesređenoj okolini. Za određivanje pozicije i orijentacije predmeta potrebno je poznavati koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ , koje leže u istoj ravnini te je određuju.

Ulazni podaci u algoritam su koordinate točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $O$ , te duljina stranice jednakostraničnog trokuta označena sa  $X$ .

Za primjer napravljen u programskom paketu CATIA, koordinate točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $O$ , te duljina stranice jednakostraničnog trokuta označena sa  $X$ , prikazane su u sljedećoj tablici.

**Tablica 2.** Očitani podaci koordinata točaka te duljine stranice jednakostraničnog trokuta iz programskog paketa CATIA

		x	y	z
<b>Koordinate točaka</b>	<b>A</b>	-23,84	4,995	0
	<b>B</b>	3,13	-39,355	0
	<b>C</b>	23,95	19,94	0
	<b>O</b>	0	0	-70
<b>Duljina stranice</b>	<b>X</b>	100		

Kako su poznate koordinate točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $O$ , algoritam određuje duljine svih dužina piramide  $OABC$ , prema jednadžbi (33). Vrijednosti duljina dužina su potrebne za određivanje kuteva  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ , koje zatvaraju te stranice.

Sljedeći korak u algoritmu je odrediti rješenja jednadžbe (43), koja predstavlja omjer duljina stranica  $OC'$  i  $OB'$ . Taj omjer označen je slovom  $T$ . Kako je jednadžba (43) četvrtog reda, moguće je dobiti četiri rješenja, koja se uvrštavaju u jednadžbu (41). Ona će dati četiri rješenja za omjer duljina stranica  $OA'$  i  $OB'$ , koji se označava slovom  $S$ . Samo pozitivna i realna rješenja su prihvatljiva. Za ovaj primjer, sva rješenja za  $S$  i  $T$  su prikazana u sljedećoj tablici.

**Tablica 3.** Vrijednosti za  $T$  i  $S$

<b><math>T</math></b>	1,0010	0,7924	$1,1049 + 0,1583i$	$1,1049 - 0,1583i$
<b><math>S</math></b>	0,2835	1,1688	$1,3343 + 0,1205i$	$1,3343 - 0,1205i$

Ako se pogledaju rezultati za  $T$  i  $S$ , prikazani u tablici 3., vidi se da su prva dva rješenja realna, dok su druga dva imaginarno-kompleksna. Imaginarno- kompleksna rješenja mogu se eliminirati iz razloga što su konstrukcijski nemoguća te se broj mogućih rješenja sa četiri smanjuje na dva.

Tablica 4. Moguća rješenja za  $T$  i  $S$ 

$T$	1,0010	0,7924
$S$	0,2835	1,1688

Da bi se odredilo jedinstveno rješenje za  $T$  i  $S$ , potrebno je upotrijebiti stečeno znanje o markerima, odnosno povezanosti veličine polumjera markera sa duljinom stranice. Dakle, što je dimenzija polumjera, koja je očitana kamerom, veća, to je duljina stranice, vezana uz taj polumjer, manja. Vrijedi i obrnuto.

Za koordinate točaka i duljinu stranica prikazanih u tablici 2., odnos između stranica je  $c < b < a$ , s time da  $c$  označava duljinu stranice  $OC'$ ,  $b$  duljinu stranice  $OB'$  i  $a$  duljinu stranice  $OA'$ . Taj odnos izračunat je pomoću algoritma u MATLAB-u i vidljiv je u tablici 7. Za njega vrijede sljedeći uvjeti prikazani u tablici 5.

Tablica 5. Uvjeti za odnos stranica  $c < b < a$ 

$c < b < a$	$S > T$
	$S > 1$
	$T < 1$

Prvi uvjet je da omjer stranica  $a$  i  $b$  mora biti veći od omjera stranica  $c$  i  $b$ . Rješenje iz tablice 4., koje zadovoljava taj uvjet, je broj 1,1688.

Sljedeću uvjet iz tablice 3. je da omjer stranica  $a$  i  $b$  mora biti veći od 1. Rješenje iz tablice 4., koje zadovoljava taj uvjet, je broj 1,1688.

Zadnji uvjet, koji mora biti zadovoljen, je da omjer stranica  $c$  i  $b$  mora biti manji od 1. Rješenje iz tablice 4., koje zadovoljava taj uvjet, je broj 0,7924.

Dobiveno je jedinstveno rješenje za omjere stranica  $a$  i  $b$  te  $c$  i  $b$ , koje je prikazano u sljedećoj tablici.

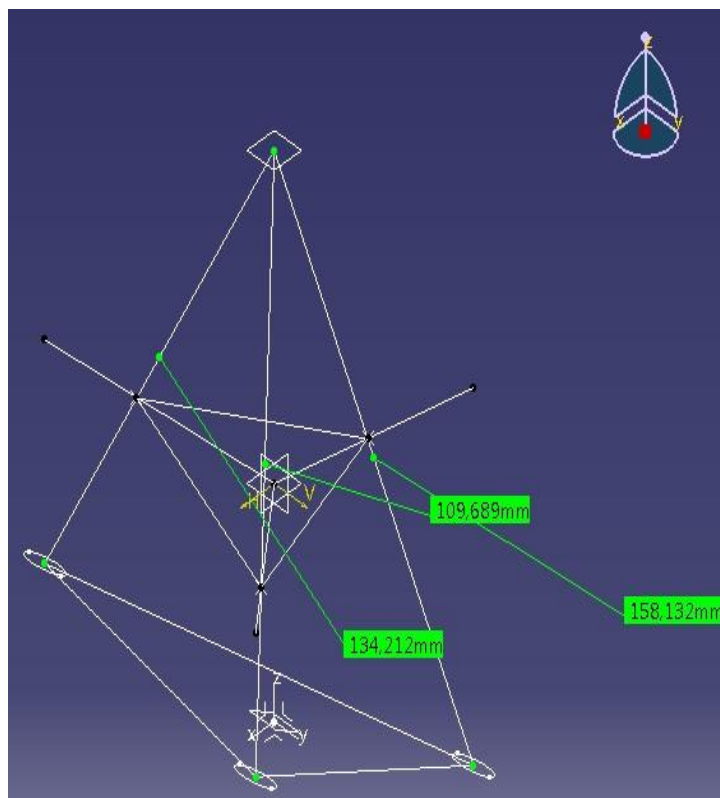


Tablica 6. Konačno rješenje za T i S

$T$	0,7924
$S$	1,1688

Iz razloga što su poznate jedinstvene vrijednosti za  $T$  i  $S$ , prema jednadžbi (47), algoritam računa duljinu stranice  $b$ . Duljina stranica  $B'C'$ , koja je nužna za izračunavanje stranice  $b$ , je u tablici 2. označena s  $X$ , te za ovaj primjer iznosi 100mm.

Kad se izračuna duljina stranice  $b$ , primjenom jednadžbi (44) i (45), algoritam računa dimenzije preostalih stranica.



Slika 16. Duljine stranica prikazane u CATIA-i

Tablica 7. Duljine stranica a, b i c izračunate algoritmom u Matlabu

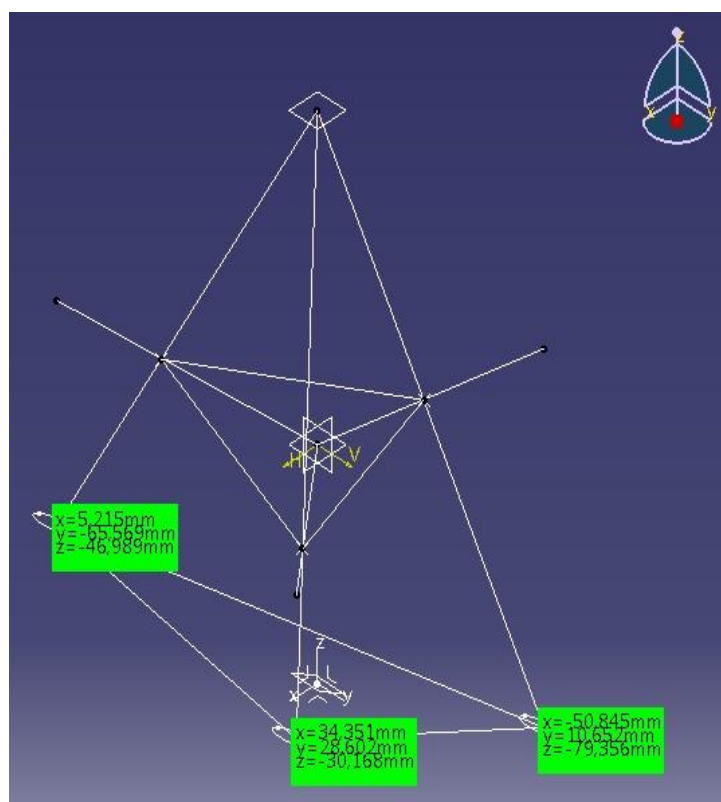
Duljina stranica	a	b	c
	157,66	134,89	106,9

Rješenja dobivena u MATLAB-u mogu se usporediti s onima dobivenim iz CATIA-e (slika 15.), te vidjeti da su duljine stranice gotovo identične.

Zadnji i najbitniji korak je odrediti koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ . Za određivanje koordinata svake točke, koriste se jednačbe (50), (51) i (53) uz napomenu da je za točku  $A'$  vezana duljina stranice  $a$ , za točku  $B'$ , duljina stranice  $b$  i za točku  $C'$ , duljina stranice  $c$ .

Za svaku točku prvo se izračunava koordinata  $Z$ , prema jednačbi (53), iz razloga što su za nju vezane jednačbe za koordinate  $X$  i  $Y$ .

Iz jednačbe (53) dobiju se dva rješenja; jedno pozitivno i drugo negativno. Algoritam je napravljen na način da se odabire negativno rješenje zato što se polazi od pretpostavke da će se točke  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  sigurno nalaziti ispod točaka  $O$ ,  $A$ ,  $B$  i  $C$ .



Slika 17. Koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  prikazane u CATIA-i

Tablica 8. Koordinate točaka A', B' i C' izračunate algoritmom u Matlabu

		A'	B'	C'
Koordinate točaka	X	-50,7151	5,2540	33,4136
	Y	10,6259	-66,0605	27,8191
	Z	-78,9117	-47,5006	-27,6598

Kako je vidljivo iz tablice 8. i slike 16., koordinate točaka A', B' i C' su gotovo identične.

Za provjeru, algoritam uspoređuje duljine stranica jednakostraničnog trokuta sa unesenom duljinom na početku programa. U ovom slučaju one se poklapaju te iznose 100mm.

## 5.2. Dodatak algoritmu u svrhu dobivanja jedinstvenog rješenja

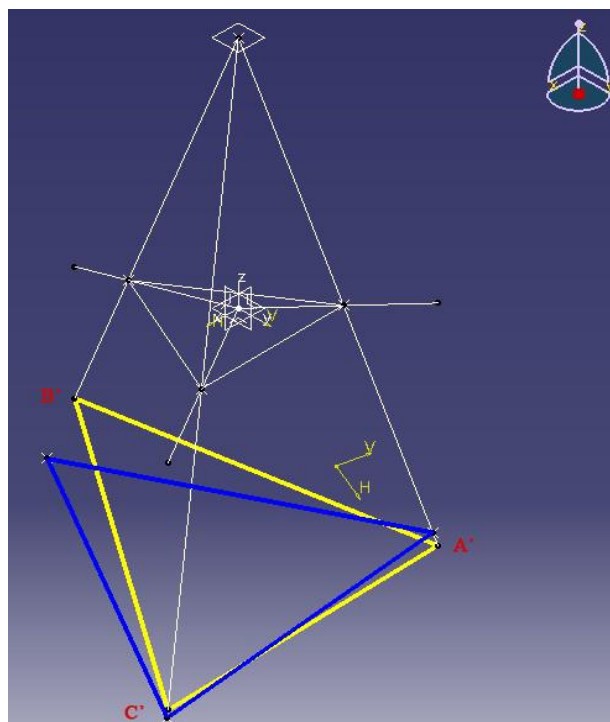
U nekim primjerima, provedenim kroz ovaj algoritam, nije se odmah moglo izdvojiti jedinstveno rješenje za omjere  $T$  i  $S$  iz razloga što je postojalo više jednakih odnosa između stranica  $a$ ,  $b$  i  $c$ , koji su zadovoljavali uvjete iz tablice 1.

U tim slučajevima, rezultat algoritma bili su dva ili više jednakostranična trokuta.

U realnoj situaciji to bi značilo, da se za određene koordinate točaka, očitane kamerom, predmet može nalaziti u dvije ili više ravnina, a to je nemoguće. Tim zaključkom se ne dolazi do jedinstvenog rješenja, odnosno, ne može se odrediti položaj i orijentaciju traženog predmeta.

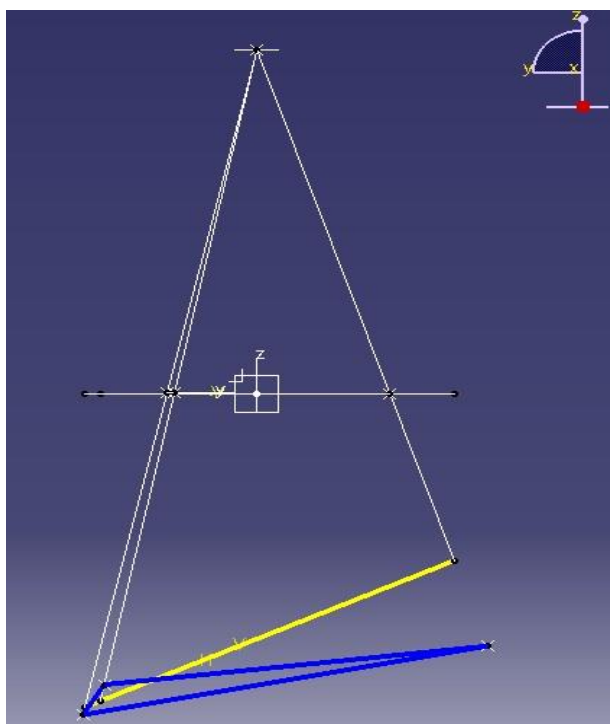
Da bi se vidjelo u čemu je problem, u programskom paketu CATIA, konstruirana su rješenja trokuta, koji su dobivena algoritmom.

Žuti trokut predstavlja ispravno, odnosno ono rješenje, koja bi se trebalo dobiti za određene koordinate točaka A, B i C, očitane kamerom. Plavi trokut predstavlja rješenje, koje ne odgovara ovom slučaju, ali se pojavilo kao moguće u algoritmu.



Slika 18. Rješenja trokuta

Razlika u koordinatama najbolje se može vidjeti na sljedećoj slici.

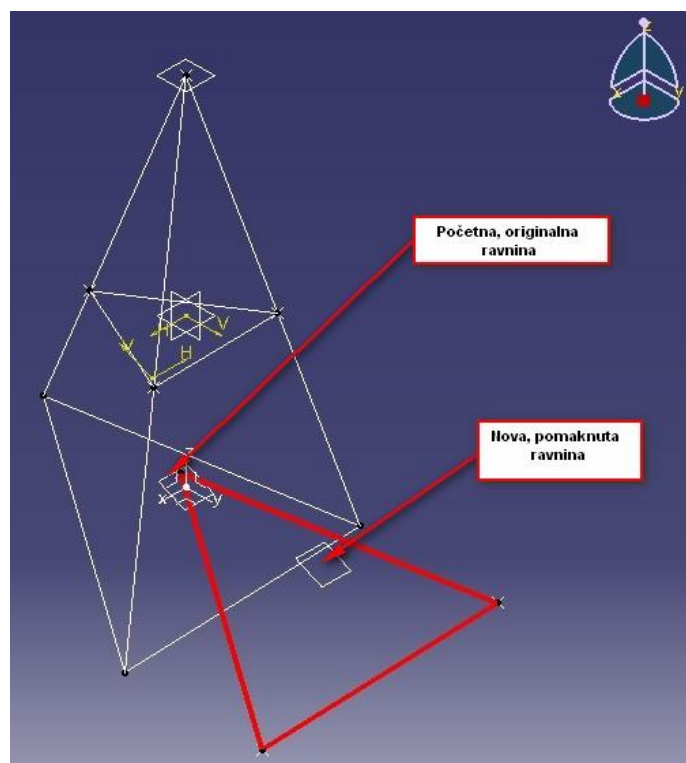


Slika 19. Razlika u koordinatama točaka plavog i žutog trokuta

Iz slika 17. i 18., vidljivo je da se najveća razlika žutog i plavog trokuta pojavljuje u svim točkama  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ , kod  $Z$  koordinate. Ta spoznaja navela nas je na novo, drugačije rješenje određivanja lokalizacije objekta metodom triangulacije.

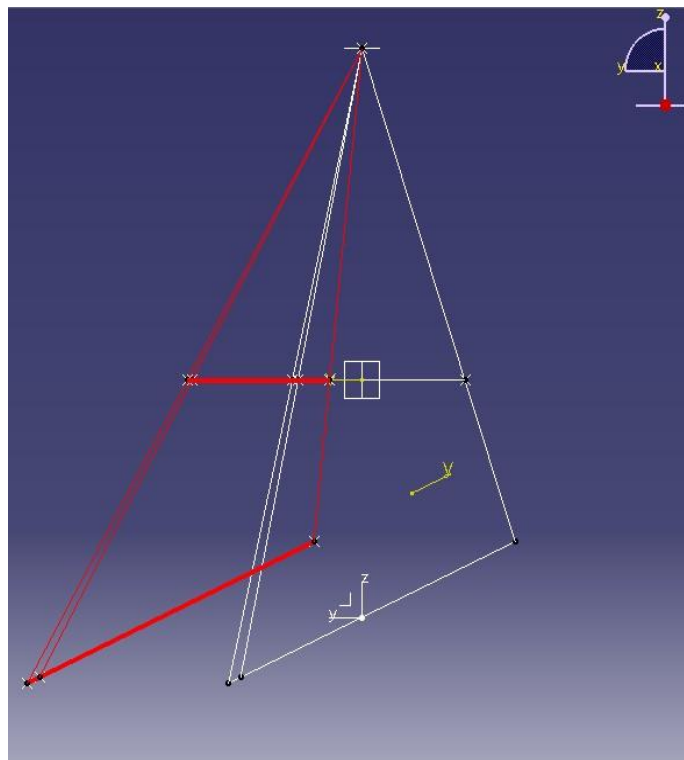
Ideja je u programskom paketu CATIA napraviti novu, zakrenutu ravninu, koja će biti kopija ravnine, u kojoj se nalazi više jednakostraničnih trokuta. Ta ravnina će biti odmaknuta od nje za neku udaljenost u smjeru osi  $y$ . Kopiranje i odmicanje zakrenute ravnine u smjeru osi  $y$  je simulacija postavljanja još jedne kamere u realnom slučaju.

U toj ravnini, nalazit će se jednakostranični trokut istih dimenzija kao i onaj u originalnoj ravnini. Slika 19. prikazuje te dvije ravnine i dva trokuta. Da bi se razlikovali, novi trokut je crvene boje.



Slika 20. Odmaknuta ravnina sa istim jednakostraničnim trokutom

Dakle, cilj je usporediti rezultate  $Z$  koordinata, trokuta, koji se nalazi u pomaknutoj ravnini, sa onim  $Z$  koordinatama, trokuta (žutog i plavog) dobivenih u originalnoj ravnini. Onaj trokut iz originalne ravnine, čije se  $Z$  koordinate poklapaju sa  $Z$  koordinatama trokuta iz pomaknute ravnine, je ispravan trokut za određeni skup koordinata točaka  $A$ ,  $B$  i  $C$ , očitanih kamerom.



Slika 21. Jednake koordinate Z u kopiranoj i originalnoj ravnini

Opisanim postupkom eliminiraju se ostala, te dobije jedinstveno, rješenje za koordinate točaka  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$ , koji se nalaze u jednoj ravnini. Time se dobiva konačan položaj i orijentaciju predmeta.

### 5.3. Prikaz konačnih rezultata za provedene primjere

U ovom poglavlju biti će prikazani dobiveni rezultati nekoliko primjera, konstruiranih u programskom paketu CATIA.

Ulazni podaci u algoritam prikazani su u sljedećoj tablici.

**Tablica 9. Ulazni podaci konstruiranih primjera u CATIA-i**

Očitani podaci iz CATIA-e			x	y	z
Primjer 1.	Točke	A	-23,84	4,995	0
		B	3,13	-39,355	0
		C	23,95	19,94	0
		O	0	0	-70
	Duljina stranice	X	100		
Primjer 2.	Točke	A	-35,905	7,522	0
		B	2,536	-31,89	0
		C	14,317	11,921	0
		O	0	0	-50
	Duljina stranice	X	100		
Primjer 3.	Točke	A	-25,712	-2,979	0
		B	2,536	-31,885	0
		C	12,24	4,192	0
		O	0	0	-50
	Duljina stranice	X	80		
Primjer 4.	Točke	A	-23,49	-11,487	0
		B	18,883	-27,577	0
		C	6,939	21,299	0
		O	0	0	-100
	Duljina stranice	X	100		
Primjer 5.	Točke	A	-15,771	14,323	0
		B	8,491	-23,034	0
		C	26,109	15,594	0
		O	0	0	-70
	Duljina stranice	X	100		

U sljedećoj tablici uspoređeni su rezultati duljina stranica dobivenih u Matlabu sa onima dobivenim u CATIA-i.

**Tablica 10. Usporedba rezultata duljina stranica**

		MATLAB			CATIA		
		a	b	c	a	b	c
Primjer 1.	Duljina stranica	157,66	134,89	106,9	158,132	134,212	109,689
Primjer 2.	Duljina stranica	88,77	121,99	127,93	87,68	122,22	127,898
Primjer 3.	Duljina stranica	86,0178	122,0439	120,2392	86,828	122,22	120,307
Primjer 4.	Duljina stranica	282,5616	246,6311	249,8875	282,56	246,64	249,88
Primjer 5.	Duljina stranica	138,69	110,252	146,052	138,698	110,25	146,052

U tablici 11. prikazani su rezultati koordinata točaka A', B' i C'.

**Tablica 11. Usporedba rezultata koordinata točaka A', B' i C'**

			MATLAB			CATIA		
			A'	B'	C'	A'	B'	C'
Primjer 1.	Koordinate točaka	X	-50,7151	5,2540	33,4136	-50,845	5,215	34,351
		Y	10,6259	-66,0605	27,8191	10,652	-65,569	28,602
		Z	-78,9117	-47,5006	-27,6598	-79,356	-46,989	-30,168
Primjer 2.	Koordinate točaka	X	-51,3988	5,2119	34,3275	-50,845	5,215	34,351
		Y	10,7679	-65,5397	28,5827	10,652	-65,569	28,602
		Z	-21,5761	-52,7590	-69,8838	-20,644	-53,011	-69,832
Primjer 3.	Koordinate točaka	X	-39,2822	5,2144	28,4960	-39,633	5,215	28,524
		Y	-4,5512	-65,5603	9,7594	-4,592	-65,659	9,768
		Z	-26,3888	-52,8075	-66,4053	-27,118	-53,011	-66,468
Primjer 4.	Koordinate točaka	X	-64,2147	44,1696	16,9204	-64,215	44,173	16,919
		Y	-31,4021	-64,5060	51,9364	-31,403	-64,508	51,935
		Z	-173,3705	-133,912	-143,844	-173,372	-133,92	-143,84
Primjer 5.	Koordinate točaka	X	-29,92	12,614	50,01	-29,93	12,615	50,015
		Y	27,18	-34,22	29,87	27,18	-34,22	29,873
		Z	-62,67	-34,04	-63,93	-62,67	-34,043	-63,93



Ako se usporede rezultati dobiveni algoritmom, napravljenim u MATLAB-u, sa onim očitanim iz programskog paketa CATIA, moguće je vidjeti da su razlike u rezultatima vrlo male, gotovo zanemarive.

Može se zaključiti da algoritam dobro funkcionira te da su rezultati, dobiveni njime, vjerodostojni.

## 6. ZAKLJUČAK

Ideja za odabir ove teme za diplomski rad, razvila se prilikom izrade završnog rada. U njemu je proučen rad FANUC iRVision 3D laserskog senzora te razvijen algoritam za hvatanje predmeta u nestrukturiranoj okolini. Prilikom izrade završnog rada, uočeno je da se geometrija predmeta, ako je on nagnut pod većim kutem, toliko deformira, da vizijski sustav taj predmet ne može prepoznati.

Istražujući dostupnu literaturu, došlo se do zaključka da bi se problem deformacije geometrije predmeta, mogao riješiti uporabom markera, iz razloga što oni imaju jednostavnu geometriju, koja se lakše prepoznaje.

Postoje mnoge metode markiranja predmeta te su neke od njih predstavljene u uvodnom dijelu diplomskog rada.

Metoda, koja je odabrana za analizu te prema kojoj je napravljen algoritam, je metoda predmarkiranja s tri kružna markera, čija središta čine jednakostraničan trokut. Ona se još naziva i metoda triangulacije.

Tri kružna markera postavljaju se na predmet, kojem se želi odrediti prostorni položaj. Ako se taj predmet nagne pod nekim kutem, kamera, koja ga snima, neće vidjeti jednakostraničan trokut, već će taj trokut imati različite duljine stranica.

Cilj ove metode je otkriti koordinate središta markera, koji se nalaze na predmetu, zato što se na taj način može odrediti i njegov prostorni položaj.

Na temelju ovih saznanja, metoda predmarkiranja s tri kružna markera, je u ovom diplomskom radu, prvo opisana aritmetički. Dakle, napravljeni su svi matematički izvodi vezani uz nju.

Nakon toga, slijedila je izrada algoritma u programskom paketu MATLAB.

Na kraju, rezultati dobiveni MATLAB-om su uspoređeni s rezultatima konstrukcijskih primjerima oblikovanim u programskom paketu CATIA.

Iako se rezultati podudaraju, došlo se do zaključka da bi se za bolju stabilnost cijelog sustava, u realnim situacijama trebale koristiti dvije kamere, koje bi snimale predmet. Tad bi se ovaj algoritam mogao primijeniti na robotu za rješavanje stvarnog slučaja određivanja prostornog položaja predmeta.

## LITERATURA

- [1] Jerbić B., Nikolić G., Vranješ B., Kunica Z., Projektiranje automatskih montažnih sustava, Kigen d.o.o. Zagreb, 2009.
- [2] Jerbić B., predavanja iz kolegija Vizijski sustavi, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2011.
- [3] Jain R., Kasturi R., Schunck B.G., Machine vision, McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1995.
- [4] Zarevski P., Psihologija pamćenja i učenja, Naklada Slap, Jastrebarsko, 2001.
- [5] Horvat I., Završni rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2010.
- [6] Bales W. J., Barker K. L., Marking Parts To Aid Robot Vision, National Aeronautics and Space Administration, 1981.
- [7] Hinterstoisser S., Benhimane S., Navab N., N3D: Natural 3D Markers for Real Time Object Detection and Pose Estimation, Department of Computer Science, Technical University of Munich, 2010.
- [8] Safaei-Rad R., Benhabib B., Smith K.C., Zhou Z. Pre-marking methods for 3D object recognition, University of Toronto, Toronto, Ontario, Kanada, IEEE, 1989.
- [9] Molder C., The Origins of Matlab, Mathworks.com, 2004.
- [10] <http://en.wikipedia.org/wiki/CATIA>, pristup 20.01.2013.

## PRILOG

```
clear all
clc
close all

%unos koordinata točkaka A, B, C i O

%koordinate točke A
x1=-15.791;
y1=14.341;
z1=0;

%koordinate točke B
x2=8.487;
y2=-23.024;
z2=0;

%koordinate točke C
x3=26.141;
y3=15.613;
z3=0;

%koordinate točke O
x4=0;
y4=0;
f=-70;

%duljina stranice jednakostraničnog trokuta

X=80;

%radijusi

r1=5;
r2=6;
r3=4;

%duljina stranica BC, CO i OB

BC= sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2+(z3-z2)^2);

CO=sqrt((x4-x3)^2+(y4-y3)^2+(f-z3)^2);

BO= sqrt((x4-x2)^2+(y4-y2)^2+(f-z2)^2);

%duljina stranica AC, CO i AO

AC= sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2+(z3-z1)^2);

OC=CO;

AO= sqrt((x4-x1)^2+(y4-y1)^2+(f-z1)^2);
```

```
%duljina stranice AB

AB=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2+(z2-z1)^2);

%kosinus alfa i kut alfa

c_alfa=(BO^2+CO^2-BC^2)/(2*BO*CO);

alfa=acosd(c_alfa);

%kosinus beta i kut beta

c_beta=(AO^2+CO^2-AC^2)/(2*AO*CO);

beta=acosd(c_beta);

%kosinus gama i kut gama

c_gama=(BO^2+AO^2-AB^2)/(2*BO*AO);

gama=acosd(c_gama);

%određivanje duljina OA', OB' i OC'; OA'=a, OB'=b, OC'=c

%T=c/b;
%S=a/b;

c_beta_k=c_beta*c_beta;

c_gama_k=c_gama*c_gama;

N=(-4*c_beta*c_gama-8*c_alfa*c_beta_k)/(4*c_beta_k-1);

P=(16*c_alfa*c_beta*c_gama+2)/(4*c_beta_k-1);

Q=(-8*c_alfa*c_gama_k-4*c_beta*c_gama)/(4*c_beta_k-1);

R=(4*c_gama_k-1)/(4*c_beta_k-1);

syms x

T=solve(x^4+N*x^3+P*x^2+Q*x+R);
TT=double(T);
```

```
%traži samo pozitivna rješenja od T

k=0;

for i=1:4
    if (TT(i)>0)
        k=k+1;
        TP(k)=TT(i);
    end
end

TP

% računa S

for i=1:numel(TP)

S(i)=(TP(i)^2-1)/(2*TP(i)*c_beta-2*c_gama);

end

S

% radijusi

k=0;

if r1>r3 & r1>r2

    R1=r1;

    if r2>r3

        R2=r2;
        R3=r3;

        for i=1:numel(TP)
            if S(i)<TP(i) & S(i)<1 & TP(i)>1
                k=k+1;
                SK(k)=S(i);
                TK(k)=TP(i);
            end
        end

        SK
        TK

    else

        R3=r3;
        R2=r2;

        for i=1:numel(TP)
            if S(i)<TP(i) & S(i)<1 & TP(i)<1
                k=k+1;
                SK(k)=S(i);
```

```
        TK(k)=TP(i);
        end

        end
        SK
        TK
    end

elseif r2>r3

    R2=r2;

    if r1>r3
        R1=r1;
        R3=r3;

        for i=1:numel(TP)
            if S(i)<TP(i) & S(i)>1 & TP(i)>1
                k=k+1;
                SK(k)=S(i);
                TK(k)=TP(i);
            end
        end

        end
        SK
        TK

    else
        R3=r3;
        R1=r1;

        for i=1:numel(TP)
            if S(i)>TP(i) & S(i)>1 & TP(i)>1
                k=k+1;
                SK(k)=S(i);
                TK(k)=TP(i);
            end
        end

        end
        SK
        TK
    end

else

    R3=r3

    if r1>r2
        R1=r1;
        R2=r2;

        for i=1:numel(TP)
            if S(i)>TP(i) & S(i)<1 & TP(i)<1
                k=k+1;
                SK(k)=S(i);
                TK(k)=TP(i);
```



```

        end

        end
        SK
        TK
else
    R2=r2
    R1=r1

    for i=1:numel(TP)
        if S(i)>TP(i) & S(i)>1 & TP(i)<1
            k=k+1;
            SK(k)=S(i);
            TK(k)=TP(i);
        end
    end
    end
    SK
    TK
    end

end

%duljina stranice b, c i a, koordinate točaka A', B' i C'

for i=1:numel(TK)

b(i)=sqrt(X^2/(1+TK(i)^2-2*TK(i)*c_alfa));

c(i)=TK(i)*b(i);

a(i)=SK(i)*b(i);

end

b
c
a

%koordinate točaka u A'

for i=1:numel(TK)

Z1a(i)=-f+(a(i)*f)/(sqrt(x1^2+y1^2+f^2));

Z1b(i)=-f-(a(i)*f)/(sqrt(x1^2+y1^2+f^2));

if Z1a(i)<1

    Z1(i)=Z1a(i);

else    Z1b(i)<1

    Z1(i)=Z1b(i);

end

```

```
Z1(i);

X1(i)=( (Z1(i)+f)/f)*x1;

Y1(i)=( (Z1(i)+f)/f)*y1;
end

Z1
X1
Y1

%koordinate točaka u B'

for i=1:numel(TK)

Z2a(i)=-f+(b(i)*f)/(sqrt(x2^2+y2^2+f^2));

Z2b(i)=-f-(b(i)*f)/(sqrt(x2^2+y2^2+f^2));

if Z2a(i)<1

    Z2(i)=Z2a(i);

else    Z2b(i)<1

    Z2(i)=Z2b(i);
end

Z2(i);

X2(i)=( (Z2(i)+f)/f)*x2;

Y2(i)=( (Z2(i)+f)/f)*y2;

end

Z2
X2
Y2

%koordinate točaka u C'

for i=1:numel(TK)

Z3a(i)=-f+(c(i)*f)/(sqrt(x3^2+y3^2+f^2));

Z3b(i)=-f-(c(i)*f)/(sqrt(x3^2+y3^2+f^2));

if Z3a(i)<1;

    Z3(i)=Z3a(i);

else    Z3b(i)<1
```

```
        Z3(i)=Z3b(i);
    end

    Z3(i);

    X3(i)=( (Z3(i)+f)/f)*x3;

    Y3(i)=( (Z3(i)+f)/f)*y3;
    end

    Z3
    X3
    Y3

    %duljine stranica A'B', B'C' i C'A'

    for i=1: numel(TK)

        ab(i)=sqrt((X2(i)-X1(i))^2+(Y2(i)-Y1(i))^2+(Z2(i)-Z1(i))^2);

        bc(i)=sqrt((X3(i)-X2(i))^2+(Y3(i)-Y2(i))^2+(Z3(i)-Z2(i))^2);

        ca(i)=sqrt((X1(i)-X3(i))^2+(Y1(i)-Y3(i))^2+(Z1(i)-Z3(i))^2);

    end

    ab
    bc
    ca
```